گروه مردمی مجنا

کمیته آموزش و پژوهش

آموزش درس ریاضی پایه دهم

فصل دوم

(ریاضی فیزیک و تجربی)

مهرجویان نیکوکار ایرانیان
کد ثبت: ۴۹۱

مقدمه

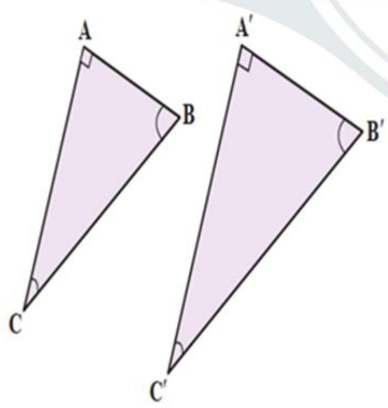
مثلثات :

مثلثات شاخهای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد

یاد آوری :

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

به‌عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید :



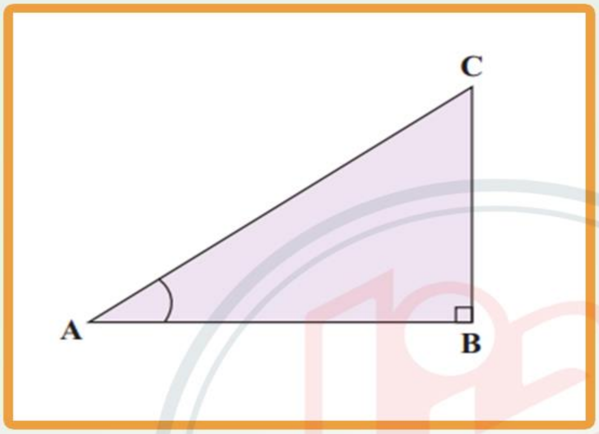
اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ در شکل مقابل قائم‌الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C'}$، آنگاه

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

نکاتی درباره تانژانت، کسینوس و سینوس زاویه :

برای به دست اوردن تانژانت، کسینوس و سینوس زاویه می توان از فرمول های زیر استفاده کرد

به شکل زیر دقت کنید



$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}} = \frac{AB}{BC}$$

گروه مردمی مجنا

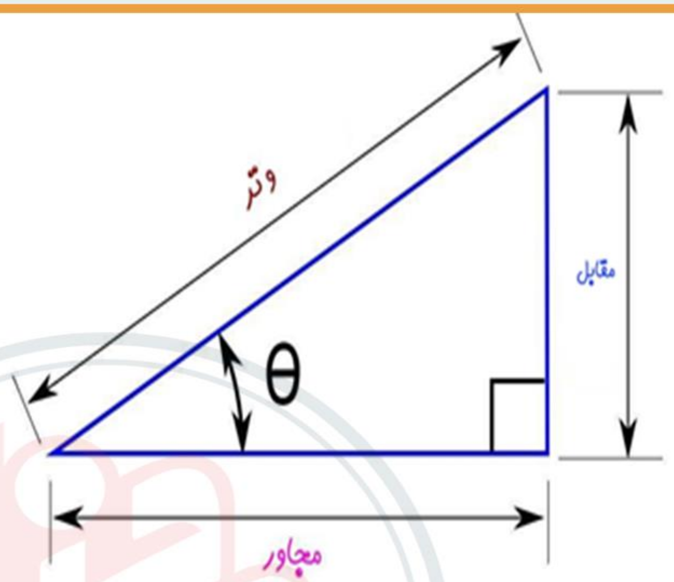
کمیته آموزش و پژوهش

به شکل زیر خوب دقت کنید :

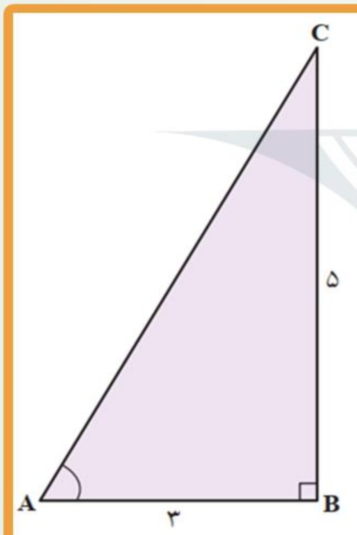
$$\sin\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$$



مثال: زاویه های خواسته شده را به دست اورید

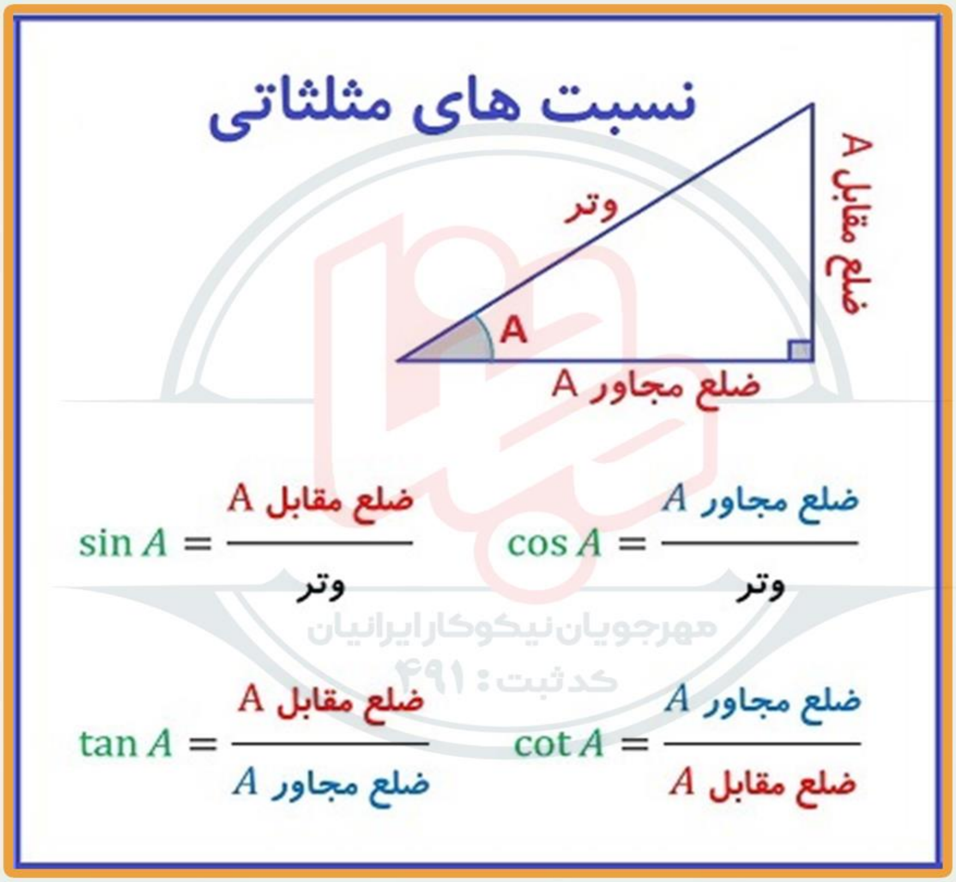


$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

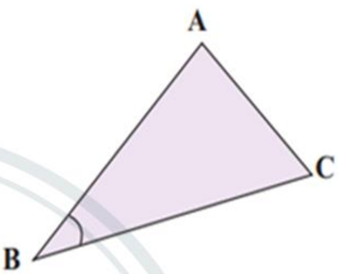
نسبت های مثلثاتی :

در یک مثلث قایم نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کوتانژانت را نسبت های مثلثاتی می گوییم .



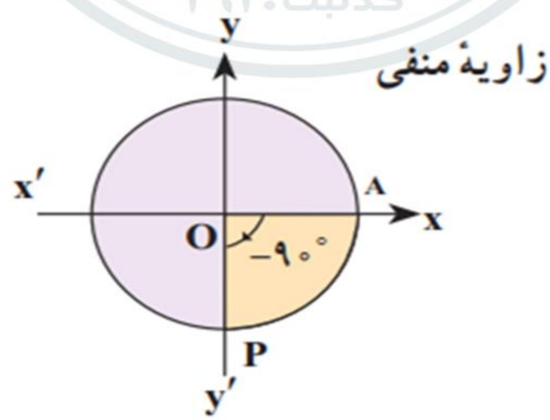
در هر مثلث با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آن ها می توان نوشت

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin B.$$

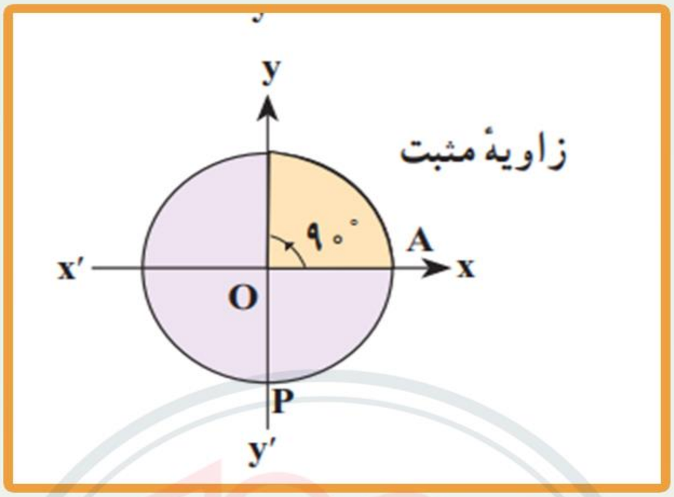


دایره مثلثاتی :

در هر یک از دایره های مثلثاتی سمت راست نقطه شروع از سمت مثبت ایکس ها شروع می شود و حرکت با سمت بالا مثبت و حرکت به سمت پایین منفی است ما اگر از محور ایکس مثبت به سمت پایین حرکت کنیم زاویه منفی داریم

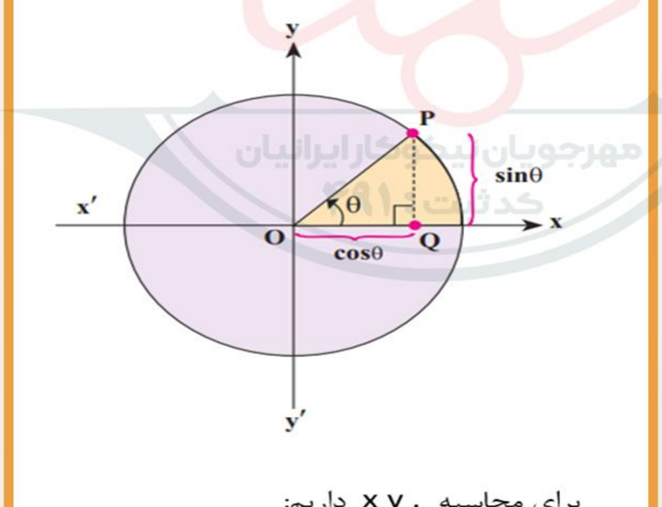


ما اگر از محور ایکس مثبت به سمت بالا حرکت کنیم زاویه مثبت داریم



به همین ترتیب هر سمتی برویم زاویه ما مشخص خواد بود

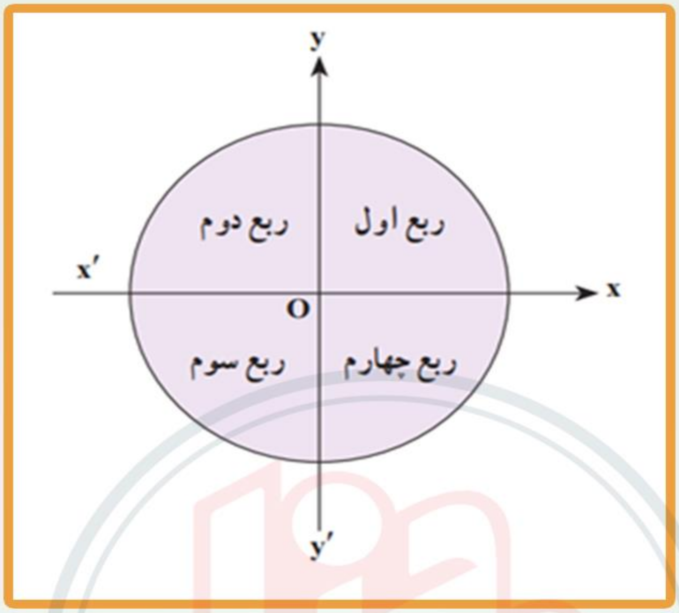
اگر ما زاویه تتا داشته باشیم در شکل زیر می توان نسبت های مثلثاتی را به دست آورد :



برای محاسبه , x y داریم:

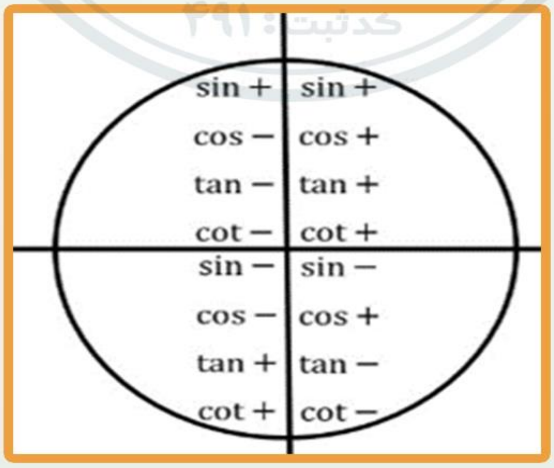
$y=\sin\theta$ و $x=\cos\theta$

اگر بخواهیم یک دایره را به چهار قسمت تقسیم کنیم مانند شکل زیر است



ما برای محاسبه زاویه ها باید توجه داشته باشیم که آن زاویه در کدام ربع قرار میگیرد و چه علامتی دادرد

مثلا زاویه ۲۳۰ در ربع دوم است پس سینوس در این ربع منفی است چون زاویه مثبت است



جدول زیر را به یاد داشته باشید

زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	+۱	۰	−۱	۰
cos	+۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	−۱	۰	+۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cot	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه :

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه :

شیب خط $=\tan\alpha$

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$

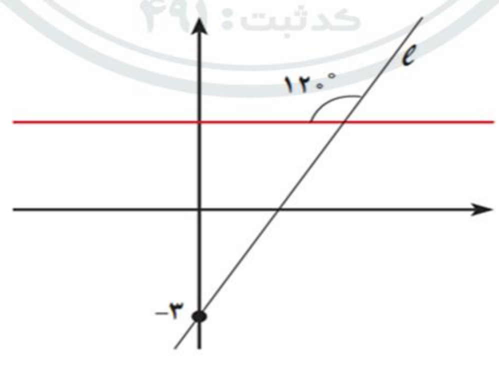
جواب کار در کلاس

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها °۳۰ است و از نقطهٔ (۱,۰) می‌گذرد.

$\tan ۳۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ شیب خط

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + b \Rightarrow ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(1) + b \Rightarrow b = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال : با توجه به شکل زیر، معادله خط L را به دست آورید



$y = ax + b$ $\quad$ $y = \sqrt{۳}x + b$ $\quad$ $y = \sqrt{۳}x - ۳$

$\tan 60° = \sqrt{۳}$

روابط بین نسبتهای مثلثاتی

$$\sin\theta \times \sin\theta = (\sin\theta)^{۲} = \sin^{۲}\theta$$

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم :

$$\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$$

با یاد گیری روابط مثلثاتی می توان برای اثبات و یا به دست آوردن یک حاصل با داشتن یک زاویه مثال های گوناگون را حل کرد پس با دقت این روابط را یاد بگیرید

مثال

اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha = \frac{-۴}{۵}$، آنگاه مقدار $\tan\alpha$، $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ را به‌دست آورید.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha} \xRightarrow{\alpha\ \text{در ناحیه سوم}} \cos\alpha = -\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}} = -\frac{۳}{۵}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳} \qquad \cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

با داشتن روابط زیر می توان مثال زیر را حل کرد

$$\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$$

$$\sin^{۲}\theta = ۱ - \cos^{۲}\theta$$

$$\cos^{۲}\theta = ۱ - \sin^{۲}\theta$$

کار در کلاس

با توجه به رابطهٔ بالا، یعنی $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ جاهای خالی را پر کنید :

الف) $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱ \Rightarrow \sin^{۲}\alpha = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ $\quad \sin\theta = \pm\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}$

ب) $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱ \Rightarrow \cos^{۲}\alpha = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ $\quad \cos\theta = \pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}$

رابطه های تانژانت برحسب کسینوس و کتانژانت برحسب سینوس

$$\Rightarrow \tan^{۲}\alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \qquad (\cos\alpha \neq ۰)$$

$$\Rightarrow ۱ + \cot^{۲}\alpha = \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha} \qquad (\sin\alpha \neq ۰)$$

$$(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} ۱-\sin^{۲}\theta = \cos^{۲}\theta$$

با دانستن روابط بالا می توان سوال های گوناگون را حل کرد

مثال

درستیِ اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{۱}{\cos\theta}+\tan\theta\right)(۱-\sin\theta)=\cos\theta$$

$$(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta)\xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}}۱-\sin^۲\theta=\cos^۲\theta$$

حل :

$$\text{طرف چپ}=\left(\frac{۱}{\cos\theta}+\tan\theta\right)(۱-\sin\theta)=\left(\frac{۱}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(۱-\sin\theta)$$

$$=\left(\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta}\right)(۱-\sin\theta)=\frac{۱-\sin^۲\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta}=\cos\theta=\text{طرف راست}$$

به نظرتان روابط مثلثاتی در سال های بالاتر هم هست؟